УДК 517.392

*И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова, С. П. Алаткин*

# ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

*Аннотация*. Предложены и обоснованы сплайн-коллокационные методы нулевого порядка решения одномерных и многомерных гиперсингулярных интегральных уравнений. Для широкого класса гиперсингулярных интегральных уравнений получены условия однозначной разрешимости. Для одномерных и многомерных уравнений Прандтля получены оценки погрешности.

*Ключевые слова*: гиперсингулярные интегральные уравнения, сплайн-коллокационные методы.

*Abstract*. Offered spline-collocation methods of the zero order for solution of the one dimensional and multidimensional hypersingular integral equations. Received conditions of the unique solutions for wide classes of hypersingular integral equations. Estimates of error are given for one dimensional and multidimensional Prandle equations.

*Keywords*: hypersingular integral equations, spline-collocation methods.

## Введение

Начиная со второй половины XX столетия неуклонно возрастает число работ, посвященных гиперсингулярным интегральным уравнениям. Это обусловлено двумя обстоятельствами:

1) наряду с традиционными областями применения (механика, аэродинамика, электродинамика) гиперсингулярные интегральные уравнения находят применение в новых областях физики и техники – ядерной физике, геофизике и др.;

2) более детальное исследование многих традиционных задач механики, аэродинамики, электродинамики требует перехода от сингулярных к гиперсингулярным интегральным уравнениям.

Однако решение сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений возможно лишь в исключительных случаях, и основным аппаратом в прикладных задачах являются численные методы.

Таким образом, как многочисленные приложения, так и собственно вычислительные задачи делают актуальной проблему разработки численных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений.

Подробное изложение численных методов решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений содержится в работах [1–7], в которых также имеется обширная библиография.

В работе [8] предложен и обоснован сплайн-коллокационный метод нулевого порядка на равномерной сетке узлов, предназначенный для приближенного решения одномерных гиперсингулярных интегральных уравнений, полигиперсингулярных интегральных уравнений, многомерных гиперсингулярных интегральных уравнений.

В связи с тем, что решения гиперсингулярных интегральных уравнений имеют особенности на концах интервалов интегрирования, представляет интерес построение и обоснование приближенных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений на неравномерных сетках узлов.

Данная статья посвящена построению и обоснованию сплайн-коллокационных методов решения одномерных и многомерных гиперсингулярных интегральных уравнений на классе функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\overline{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

Дадим описание классов функций $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и $\overline{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

**Определение 1.1** [9, 10]. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 1, 2, ..., u = 0, 1, ...$ Функция $\varphi(x_1 \ldots, x_l)$ принадлежит классу $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega} \left| \partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l} \right| \le M \text{, при } 0 \le |v| \le r;$$

$$\left| \partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1} ... \partial x_l^{v_l} \right| \le$$

$$\le M(1 + |\ln^u d(x,\Gamma)|)/(d(x,\Gamma))^{|v|-r-\zeta},\ x \in \Omega \setminus \partial\Omega, \text{ при } r < |v| \le s,$$

где $s = r + [\gamma] + 1, \gamma = [\gamma] + \mu, 0 < \mu < 1, \zeta = 1 - \mu$ при $\gamma$ нецелом, $s = r + \gamma$ при $\gamma$ целом, $d(x,\Gamma)$ – расстояние от точки $x$ до границы $\Gamma$ области $\Omega$, вычисляемое по формуле $d(x,\Gamma) = \min\limits_{1\le i\le l} \min(|1 + x_i|, |1 - x_i|)$.

**Определение 1.2** [9, 10]. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 1, 2, \ldots, \gamma$ – целое число, $s = r + \gamma$. Функция $\varphi(x_1, \ldots, x_l)$ принадлежит классу $\overline{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega} \left| \partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l} \right| \le M \text{, при } 0 \le |v| \le r - 1,$$

$$\left| \partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l} \right| \le M(1 + |\ln^u d(x,\Gamma)|), \quad x \in \Omega \setminus \partial\Omega, \text{ при } |v| = r,$$

$$\left| \partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l} \right| \le M(1 + |\ln^{u-1} d(x,\Gamma)|)/(d(x,\Gamma))^{v-r},\ x \in \Omega \setminus \partial\Omega, \text{ при } r < |v| \le s.$$

## 2. Приближенное решение одномерных гиперсингулярных интегральных уравнений на неравномерных сетках узлов

Здесь исследуется сплайн-коллокационный метод нулевого порядка на неравномерной сетке узлов, предназначенный для приближенного решения гиперсингулярных интегральных уравнений

$$a(t)x(t) + b(t)\int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau + \int_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \tag{1}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $f(t) \in H_\alpha(1)$, $h(t,\tau) \in H_{\alpha,\alpha}(1)$, $0 < \alpha \le 1$, $p = 2, 4, 6, ...$

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в предположении, что функция $b(t) \neq 0$ на сегменте [–1, 1]. Кроме того, будем считать, что уравнение (1) однозначно разрешимо при любой правой части $f(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, и его решение $x^*(t)$ принадлежит классу функций $Q^0_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

Разобъем сегмент [–1, 1] на $2N$ частей $\Delta^1_k = [t_k, t_{k+1}], \Delta^2_k = [\tau_{k+1}, \tau_k]$, $k = 0, 1, ..., N-1$, точками $t_k = -1 + (k/N)^v, \tau_k = 1 - (k/N)^v$, $k = 0, 1, ..., N$, $v = s/(s-\gamma)$.

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^1_k \psi^1_k(t) + \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^2_k \psi^2_k(t), \tag{2}$$

где $\psi^i_k(t) = \begin{cases} 1, t \in \Delta^i_k, \\ 0, t \in [-1,1] \setminus \Delta^i_k, \end{cases}$ $i = 1,2.$

Коэффициенты $\alpha^i_k$, $i = 1, 2, k = 0, 1, \dots, N-1$, будем находить из системы линейных алгебраических уравнений:

$$a(\bar{t}_k)\alpha^1_k + b(\bar{t}_k)\sum_{l=0}^{N-1}{}' \alpha^1_l \int_{\Delta^1_l} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_k)^p} + b(\bar{t}_k)\sum_{l=0}^{N-1} \alpha^2_l \int_{\Delta^2_l} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_k)^p} +$$

$$+\sum_{l=0}^{N-1} h^1_l \alpha^1_l h(\bar{t}_k, \bar{t}_l) + \sum_{l=0}^{N-1} h^2_l \alpha^2_l h(\bar{t}_k, \bar{\tau}_l) = f(\bar{t}_k), \ k = 0, 1, \dots, N-1; \tag{3}$$

$$a(\bar{\tau}_k)\alpha^2_k + b(\bar{\tau}_k)\sum_{l=0}^{N-1} \alpha^1_l \int_{\Delta^1_l} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{\tau}_k)^p} + b(\bar{\tau}_k)\sum_{l=0}^{N-1}{}' \alpha^2_l \int_{\Delta^2_l} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{\tau}_k)^p} +$$

$$+\sum_{l=0}^{N-1} h^1_l \alpha^1_l h(\bar{\tau}_k, \bar{t}_l) + \sum_{l=0}^{N-1} h^2_l \alpha^2_l h(\bar{\tau}_k, \bar{\tau}_l) = f(\bar{\tau}_k), \ k = 0, 1, ..., N-1, \tag{4}$$

где $h^1_k = t_{k+1} - t_k$, $h^2_k = \tau_k - \tau_{k+1}$, $k = 0, 1, ..., N-1$, $\bar{t}_k = (t_k + t_{k+1})/2$, $\bar{\tau}_k = (\tau_{k+1} + \tau_k)/2$, $k = 0, 1, ..., N-1$, $\sum_{l=0}^{N-1}{}' \alpha^1_k \int_{\Delta^1_l} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_k)^p}$ означает суммирование по $l \neq k-1, k+1$, причем если $k = N-1$, то это означает суммирование по $l \neq N-2$ в сумме $\sum_{l=0}^{N-1}{}' \alpha^1_l \int_{\Delta^1_l} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_k)^p}$ и по $l \neq N-1$ в сумме $\sum_{l=0}^{N-1} \alpha^2_l \int_{\Delta^2_l} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_k)^p}$.

Аналогичный смысл символ $\sum{}'$ имеет и в системе уравнений (4).

Исследуем разрешимость системы уравнений (3)–(4). Исследование разрешимости этой системы проведем, опираясь на теорему Адамара об однозначной разрешимости систем линейных алгебраических уравнений.

Обозначим через $A$ матрицу левой части системы уравнений (3)–(4): $A=\{a_{kl}\}$, $k,l=1,\dots,2N$.

Диагональные элементы матрицы $A$ имеют вид

$$a_{kk}=a(\bar{t}_k)+b(\bar{t}_k)\int\limits_{\Delta_k^1}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_k)^p}+h_k^1 h(\bar{t}_k,\bar{t}_k),\ k=0,1,\dots,N-1;$$

$$a_{kk}=a(\bar{\tau}_k)+b(\bar{\tau}_k)\int\limits_{\Delta_k^2}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{\tau}_k)^p}+h_k^2 h(\bar{\tau}_k,\bar{\tau}_k),\ k=0,1,\dots,N-1.$$

Оценим модули диагональных элементов. При этом достаточно ограничиться оценкой $a_{kk}$ при $0\le k\le N-1$. Очевидно,

$$|a_{kk}|=|a(\bar{t}_k)+b(\bar{t}_k)\int\limits_{\Delta_k^1}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_k)^p}+h_k^1 h(\bar{t}_k,\bar{t}_k)|\ge$$

$$\ge|b(t_k)|\left|\int\limits_{\Delta_k^1}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_k)^p}\right|-|h_k^1 h(\bar{t}_k,\bar{t}_k)|-|a(\bar{t}_k)|;$$

$$\left|\int\limits_{\Delta_k^1}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_k)^p}\right|\ge\frac{2^p}{p-1}\frac{1}{(h_k^1)^{p-1}},\ |a(\bar{t}_k)|\le a^*,\ \ h_k^1 h(\bar{t}_k,\bar{t}_k)|\le h_k^1 H^*,$$

где $a^*=\max\limits_{-1\le t\le 1}|a(t)|$, $H^*=\max\limits_{-1\le t,\tau\le 1}|h(t,\tau)|$.

Таким образом,

$$|a_{kk}|\ge\frac{2^p|b(\bar{t}_k)|}{p-1}\frac{1}{(h_k^1)^{p-1}}-|a(\bar{t}_k)|-h_k^1|h(t_k^1,t_k^1)|. \tag{5}$$

Оценим сумму внедиагональных элементов в $k$-й строке матрицы $A$. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{l=0}^{2n}|a_{kl}|\le|b(\bar{t}_k)|\left|\sum_{l=0}^{N-1}{}''|\int\limits_{\Delta_l^1}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_k)^p}+\sum_{l=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta_l^2}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_k)^p}\right|+$$

$$+\sum_{l=0}^{N-1}{}^* h_l^1|h(\bar{t}_k,\bar{t}_l)|+\sum_{l=0}^{N-1}h_l^2|h(\bar{t}_k,\bar{t}_l)|, \tag{6}$$

где $\sum_l''$ означает суммирование по $l \neq k-1, k, k+1$, $\sum_l^*$ по $l \neq k$. В случае, если $k = N-1$, то относительно суммы $\sum_l''$ следует сделать такое же замечание, какое было сделано относительно суммы $\sum_l'$ в уравнениях (3)–(4).

Приступая к оценке (6), предположим, что $0 < k \leq N-2$, тогда

$$\left|\sum_{l=0}^{N-1}{}'' \int_{\Delta_l^1} \frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_k)^p} + \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\Delta_l^1} \frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_k)^p}\right| = \left|\int_{-1}^{t_{k-1}} \frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_k)^p} + \int_{t_{k+2}}^{1} \frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_k)^p}\right| =$$

$$= \left|\frac{(-1)^p}{p-1}\left[\frac{1}{(\bar{t}_k - t_{k-1})^{p-1}} - \frac{1}{(1+\bar{t}_k)^{p-1}}\right] - \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(1-\bar{t}_k)^{p-1}} - \frac{1}{(t_{k+1}-\bar{t}_k)^{p-1}}\right]\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(h_{k-1}+h_k/2)^{p-1}} + \frac{1}{(h_{k+1}+h_k/2)^{p-1}}\right]. \qquad (7)$$

Пусть теперь $k = 0$, тогда

$$\left|\sum_{l=0}^{N-1}{}'' \int_{\Delta_l^1} \frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_0)^p} + \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\Delta_l^1} \frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_0)^p}\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{t_2}^{1} \frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_0)^p}\right| \leq \frac{1}{p-1}\frac{1}{(t_2-\bar{t}_0)^{p-1}} = \frac{1}{p-1}\frac{1}{(h_1+h_0/2)^{p-1}}. \qquad (8)$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Из неравенств (6)–(9) следует, что при выполнении неравенств

$$\frac{2^p\,|b(\bar{t}_k)|}{p-1}\frac{1}{(h_k^1)^{p-1}} - |a(\bar{t}_k)| - h_k^1\,|h(\bar{t}_k,\bar{t}_k)| >$$

$$> \frac{|b(\bar{t}_k)|}{p-1}\left[\frac{1}{(h_{k-1}+h_k/2)^{p-1}} + \frac{1}{(h_{k+1}+h_k/2)^{p-1}}\right] + 2H^*,\ k = 0, 1, ..., N-2,$$

$$\frac{2^p\,|b(\bar{t}_0)|}{p-1}\frac{1}{(h_0^1)^{p-1}} - |a(\bar{t}_0)| - h_k^0\,|h(\bar{t}_0,\bar{t}_0)| > \frac{|b(\bar{t}_0)|}{p-1}\frac{1}{(h_1+h_0/2)^{p-1}} + 2H^*$$

и аналогичных неравенств, связанных с рассмотрением узлов $\tau_k$, $k = 0, 1, \ldots, N-2$, $t_{N-1}, \tau_{N-1}$, система уравнений (3) однозначно разрешима.

*Замечание 1.* Аналогичные результаты справедливы и для гиперсингулярных интегральных уравнений вида

$$a(t)x(t)+b(t)\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{|\tau-t|^{p+\lambda}}+\int_{-1}^{1}h(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t),\ \ p=1,2,...,0<\lambda<1.$$

Рассмотрим уравнение первого рода

$$\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{p}}=f(t),\ \ p=2,4,6,... \tag{9}$$

которое находит широкое применение в аэродинамике.

Приближенное решение уравнения (9) будем искать в виде кусочно-постоянной функции (2), коэффициенты которой находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l^1\int_{\Delta_l^1}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_k)^p}+\sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l^2\int_{\Delta_l^2}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_k)^p}=f(\bar{t}_k),$$

$$\sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l^1\int_{\Delta_l^1}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{\tau}_k)^p}+\sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l^2\int_{\Delta_l^2}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{\tau}_k)^p}=f(\bar{\tau}_k)\,,\ k=0,1,...,N-1. \tag{10}$$

Повторяя рассуждения, приведенные при обосновании вычислительной схемы (3)–(4), можно показать, что при $N\geq 3$ система уравнений (10) однозначно разрешима.

Рассмотрим уравнение первого рода вида

$$\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{|\tau-t|^{p+\lambda}}=f(t), \tag{11}$$

где $p=1,2,...,0<\lambda<1$.

Приближенное решение уравнения (11) будем искать в виде кусочно-постоянной функции (2), коэффициенты которой находятся из системы

$$\sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l^1\int_{\Delta_l^1}\frac{d\tau}{|\tau-\bar{t}_k|^{p+\lambda}}+\sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l^2\int_{\Delta_l^2}\frac{d\tau}{|\tau-\bar{t}_k|^{\lambda}}=f(\bar{t}_k),$$

$$\sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l^1\int_{\Delta_l^1}\frac{d\tau}{|\tau-\bar{\tau}_k|^{p+\lambda}}+\sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l^2\int_{\Delta_l^2}\frac{d\tau}{|\tau-\bar{\tau}_k|^{\lambda}}=f(\bar{\tau}_k),\ \ k=0,1,...,N-1. \tag{12}$$

Повторяя рассуждения, приведенные при обосновании вычислительной схемы (3)–(4), можно показать, что при $N\geq 3$ система уравнений (10) однозначно разрешима. Кроме того, повторяя рассуждения, приведенные в работе [8], можно показать, что при $p=1, 0<\lambda<1$ норма разности в метрике пространства $C$ между решениями $x^*(t)$ уравнения (11) и $x^*{}_N(t)$ системы уравнений (12) удовлетворяют неравенству $\| x^*(t) - x_N^*(t) \| \le AN^{-(1-\lambda)}$.

### 3. Приближенное решение многомерных гиперсингулярных интегральных уравнений сплайн-коллокационным методом нулевого порядка

В этом разделе исследуется сплайн-коллокационный метод нулевого порядка решения гиперсингулярного интегрального уравнения

$$a(t_1,t_2)x(t_1,t_2)+b(t_1,t_2)\int\limits_{\Omega}\frac{x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{\left((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2\right)^{p/2}}+$$

$$+\int\limits_{\Omega} h(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1,t_2), \qquad (13)$$

где $\Omega=[-1,1;-1,1]$; $p=3,4,...$; $a(t_1,t_2), b(t_1,t_2), f(t_1,t_2), h(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)$ – гладкие функции.

Здесь мы ограничиваемся двумерным случаем для простоты обозначений. Из результатов, изложенных ниже, легко видеть, что они практически дословно переносятся на уравнения любой конечной размерности.

Будем искать приближенное решение уравнения (13) в предположении, что оно принадлежит классу функций $Q_{r,\gamma}(\Omega,M)$.

Обозначим через $\Delta^k$ множество точек $x\in\Omega$, удовлетворяющих неравенствам

$$\left(\frac{k}{N}\right)^v \le d(x,\Gamma) \le \left(\frac{k+1}{N}\right)^v,\ k=0,1,...,N-1,$$

где $d(x,\Gamma)$ – расстояние от точки $x$ до границы $\Gamma=\partial\Omega$ области $\Omega, v=s/(s-\gamma)$. Пусть $h_k=((k+1)/N)^v-(k/N)^v$, $k=0,1,...,N-2$, $h_{N-1}=1-((N-1)/N)^v$.

Каждую область $\Delta^k$ покроем квадратами $\Delta^k_{i_1,i_2}$ с ребрами, имеющими длину $h_k$ и параллельными координатным осям. То обстоятельство, что среди квадратов $\Delta^k_{i_1,i_2}$ может встретиться четыре прямоугольника, у которых длина одной стороны меньше $h_k$, не влияет на общность рассуждений. Для простоты все области $\Delta^k_{i_1,i_2}$ будем называть квадратами.

Приближенное решение уравнения (13) будем искать в виде кусочно постоянной функции

$$x_N(t_1,t_2)=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i_1,i_2}\alpha^k_{i_1,i_2}\Psi\left(t_1,t_2;\Delta^k_{i_1,i_2}\right); \qquad (14)$$

$$\psi(t_1,t_2;\Delta^k_{i_1,i_2})=\begin{cases}1, (t_1,t_2)\in\Delta^k_{i_1,i_2},\\ 0, (t_1,t_2)\in[-1,1]^2\setminus\Delta^k_{i_1,i_2},\end{cases}$$

коэффициенты $\alpha^k_{i_1,i_2}$ которой находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$a(\bar{v}^k_{i_1,i_2})\alpha^k_{i_1,i_2}+b(\bar{v}^k_{i_1,i_2})\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j_1}\sum_{j_2}{}'\int\limits_{\Delta^l_{j_1,j_2}}\int\frac{x_N(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{\left(\left(\tau_1-\bar{v}^k_{i_1}\right)^2+\left(\tau_2-\bar{v}^k_{i_2}\right)\right)^{p/2}}+$$

$$+\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j_1}\sum_{j_2}h\left(\bar{v}^k_{i_1,i_2},\bar{v}^l_{j_1,j_2}\right)\sigma^k_{j_1,j_2}\alpha^k_{j_1,j_2}=f\left(\bar{v}^k_{i_1,i_2}\right), \qquad (15)$$

где $\sigma^k_{j_1,j_2}$ – площадь области $\Delta^k_{j_1,j_2}$, $\left(\bar{v}^k_{i_1},\bar{v}^l_{i_2}\right)$ – центр области $\Delta^k_{i_1,i_2}$. В формуле (15) $\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j_1}\sum_{j_2}$ означает суммирование по всем квадратам $\Delta^k_{i_1,i_2}$, осуществляющим покрытие области $\Omega$, сумма $\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j_1}\sum_{j_2}{}'$ означает суммирование по всем квадратам $\Delta^l_{j_1,j_2}$, которые не соприкасаются с квадратом $\Delta^k_{i_1,i_2}$, причем сам квадрат $\Delta^k_{i_1,i_2}$ учитывается в сумме $\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j_1}\sum_{j_2}{}'$.

В формуле (15) правая и левая части приравниваются в центрах $\bar{v}^k_{i_1,i_2}$ всех квадратов $\Delta^k_{i_1,i_2}$, покрывающих область $\Omega$.

Доказательство однозначной разрешимости систем уравнений (15) проведем, используя теорему Адамара об однозначной разрешимости систем линейных алгебраических уравнений. Для этого вначале оценим абсолютную величину диагональных элементов матрицы $K_N$, представляющей левую часть системы (15).

Диагональные элементы $K_N$ имеют следующий вид:

$$|m_{nn}|=\left|a\left(\bar{v}^k_{i_1,i_2}\right)+b(\bar{v}^k_{i_1,i_2})\int\limits_{\Delta^k_{i_1,i_2}}\int\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\left(\tau_1-\bar{v}^k_{i_1}\right)^2+\left(\tau_2-\bar{v}^k_{i_2}\right)^2\right)^{p/2}}+\right.$$

$$\left. + \sigma_{i_1,i_2}^{k} h\left(\bar{v}_{i_1,i_2}^{k}, \bar{v}_{i_1,i_2}^{k}\right)\right|. \tag{16}$$

Оценим интеграл

$$\left| \int\limits_{\Delta_{i_1,i_2}^{k}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\left(\tau_1 - \bar{v}_{i_1}^{k}\right)^2 + \left(\tau_2 - \bar{v}_{i_2}^{k}\right)^2\right)^{p/2}} \right|.$$

Так как $\Delta_{i_1,i_2}^{k}$ – или квадрат со стороной $h_k$, или прямоугольник, у которого длина одной стороны равна $h_k$, а второй меньше $h_k$, то достаточно оценить модуль интеграла

$$\left| \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\tau_1^2 + \tau_2^2\right)^{p/2}} \right|, \tag{17}$$

где $a = h_k/2$.

Это следует из того, что модуль интеграла вида (17) по прямоугольнику со сторонами $a$ и $b$, $b < a$, будет больше, чем модуль интеграла (17) по квадрату $[-a,a]^2$.

Очевидно,

$$\left| \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1^2 + \tau_2^2)^{p/2}} \right| = 8 \left| \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \int\limits_{0}^{a/\cos(\varphi-\pi/4)} \frac{d\rho}{\rho^{p-1}} d\varphi \right| =$$

$$= \frac{8}{(p-2)a^{p-2}} \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos(\varphi - \pi/4))^{p-2} d\varphi = \frac{8}{(p-2)a^{p-2}} \int\limits_{0}^{\pi/4} (\cos\varphi)^{p-2} d\varphi >$$

$$> \frac{8}{(p-2)^2 a^{p-2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{p-2}.$$

Отсюда следует, что

$$|m_{nn}| \geq \left| b\left(\bar{v}_{i_1,i_2}^{k}\right) \right| \frac{8(\sqrt{2})^{p-2}}{(p-2)^2} \frac{1}{h_k^{p-2}} -$$

$$- \left| a\left(\bar{v}_{i_1,i_2}^{k}\right) \right| - (h_k/2)^2 \left| h\left(\bar{v}_{i_1,i_2}^{k}, \bar{v}_{i_1,i_2}^{k}\right) \right|. \tag{18}$$

Приступим к оценке суммы модулей внедиагональных элементов матрицы $M$. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j_1}\sum_{j_2}{}'|m_{kl}| \le |b(\bar{v}_{i_1}^k,\bar{v}_{i_2}^k)|\left|\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j_1}\sum_{j_2}{}'\int\limits_{\Delta_{j_1,j_2}^l}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\left(\tau_1-\bar{v}_{i_1}^k\right)^2+\left(\tau_2-\bar{v}_{i_2}^k\right)^2\right)^{p/2}}\right|+$$

$$+\left|\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j_1}\sum_{j_2}{}'\sigma_{j_1,j_2}^l\left|h\left(\bar{v}_{i_1,i_2}^k,\bar{v}_{j_1,j_2}^l\right)\right|\right|\le$$

$$\le|b(\bar{v}_{i_1}^k,\bar{v}_{i_2}^k)|\left|\int\int\limits_{\Omega\setminus\Delta_*}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\left(\tau_1-\bar{v}_{i_1}^k\right)^2+\left(\tau_2-\bar{v}_{i_2}^k\right)^2\right)^{p/2}}\right|+4h^*, \qquad (19)$$

где $\Delta_*$ – область, состоящая из квадрата $\Delta_{i_1,i_2}^k$ и всех остальных квадратов $\Delta_{i_1,i_2}^l$, имеющих с $\Delta_{i_1,i_2}^k$ непустое пересечение.

Здесь $\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j_1}\sum_{j_2}{}'$ означает суммирование по квадратом $\Delta_{i_1,i_2}^l$, в число которых не входит квадрат $\Delta_{i_1,i_2}^k$, и все квадраты с ним соприкасающиеся, $h^*=\max\limits_{-1\le t_1,t_2,\tau_1,\tau_2\le 1}|h(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)|$.

Оценим сверху модуль интеграла

$$\left|\int\int\limits_{\Omega\setminus\Delta_*}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\left(\tau_1-\bar{v}_{i_1}^k\right)^2+\left(\tau_2-\bar{v}_{i_2}^k\right)^2\right)^{p/2}}\right|.$$

При этом необходимо рассмотреть два случая: $k=0$ и $k\ne 0$.

Вначале рассмотрим первый случай. Очевидно,

$$\left|\int\int\limits_{\Omega\setminus\Delta_*}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\left(\tau_1-\bar{v}_{i_1}^0\right)^2+\left(\tau_2-\bar{v}_{i_2}^0\right)^2\right)^{p/2}}\right|\le$$

$$\le \left| \int\limits_{\Omega \setminus S(\bar{v}^0_{i_1,i_2}, r_0^*)} \int \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left( \left(\tau_1 - \bar{v}^0_{i_1}\right)^2 + \left(\tau_2 - \bar{v}^0_{i_2}\right)^2 \right)^{p/2}} \right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{S(\bar{v}^0_{i_1,i_2}, 2\sqrt{2}) \setminus S(\bar{v}^0_{i_1,i_2}, r_0^*)} \int \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left( \left(\tau_1 - \bar{v}^0_{i_1}\right)^2 + \left(\tau_2 - \bar{v}^0_{i_2}\right)^2 \right)^{p/2}} \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{S(0, 2\sqrt{2}) \setminus S(0, r_0^*)} \int \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\tau_1^2 + \tau_2^2\right)^{p/2}} \right| \le \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{r_0^*}^{2\sqrt{2}} \frac{d\rho}{\rho^{p-1}} \le \frac{2\pi}{p-2} \frac{1}{(r_0^*)^{p-2}}. \qquad (20)$$

Здесь $r_0^* = 3h_0/2$, $S(a,\rho)$ – круг радиуса $\rho$ с центром в точке $a$. Из (19) и (20) следует, что

$$\sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j_1} \sum_{j_2}{}' | m_{kl} | \le | b(\bar{v}^0_{i_1}, \bar{v}^0_{i_2}) | \frac{2\pi}{p-2} \left( \frac{2}{3h_0} \right)^{p-2} + 4h^*. \qquad (21)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $k \ne 0$. Очевидно,

$$\sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j_1} \sum_{j_2}{}' | m_{kl} | \le \left| \int\limits_{\Omega \setminus S(\bar{v}^k_{i_1,i_2}, r_0^*)} \int \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left( \left(\tau_1 - \bar{v}^k_{i_1}\right)^2 + \left(\tau_2 - \bar{v}^k_{i_2}\right)^2 \right)^{p/2}} \right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{S(0, 2\sqrt{2}) \setminus S(0, r_k^*)} \int \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\tau_1^2 + \tau_2^2\right)^{p/2}} \right| \le \frac{2\pi}{p-2} \frac{1}{(r_k^*)^{p-2}}, \qquad (22)$$

где $r_k^* = (h_{k-1} + h_k/2)$.

Из (19) и (20) следует, что

$$\sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j_1} \sum_{j_2}{}' | m_{kl} | \le | b(\bar{v}^k_{i_1}, \bar{v}^k_{i_2}) | \frac{2\pi}{p-2} \left( \frac{2}{2h_{k-1} + h_k} \right)^{p-2} + 4h^*. \qquad (23)$$

Из неравенств (18), (21) и (18), (23) следует, что если выполняются неравенства

$$\left| b\left(\bar{v}^0_{i_1,i_2}\right) \right| \frac{8(\sqrt{2})^{p-2}}{(p-2)^2} \frac{1}{h_0^{p-2}} - \left| a\left(\bar{v}^0_{i_1,i_2}\right) \right| - \left( \frac{h_0}{2} \right)^2 \left| h\left(\bar{v}^0_{i_1,i_2}, \bar{v}^0_{i_1,i_2}\right) \right| >$$

$$> \left| b\left(\bar{v}_{i_1,i_2}^0\right) \right| \frac{2\pi}{p-2} \left( \frac{2}{3h_0} \right)^{p-2} + 4h^*$$

при всех $i_1, i_2$ и неравенства

$$\left| b\left(\bar{v}_{i_1,i_2}^k\right) \right| \frac{8(\sqrt{2})^{p-2}}{(p-2)^2} \frac{1}{h_k^{p-2}} - \left| a\left(\bar{v}_{i_1,i_2}^k\right) \right| - \left( \frac{h_k}{2} \right)^2 \left| h\left(\bar{v}_{i_1,i_2}^k, \bar{v}_{i_1,i_2}^k\right) \right| >$$

$$> \left| b\left(\bar{v}_{i_1,i_2}^k\right) \right| \frac{2\pi}{p-2} \left( \frac{2}{2h_{k-1} + h_k} \right)^{p-2} + 4h^* \qquad (24)$$

при всех $k, i_1, i_2$, то система уравнений (15) однозначно разрешима.

*Замечание.* Неравенства (21) и (23) можно ослабить и, следовательно, доказать однозначную разрешимость системы уравнений (15) при более общих условиях.

Рассмотрим гиперсингулярное уравнение первого рода

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} = f(t_1, t_2), \qquad (25)$$

где $3, 4, \ldots$ .

При $p = 3$ уравнение (25) – это уравнение Прандтля, являющееся ключевым в аэродинамике.

Приближенное решение многомерного уравнения Прандтля исследовалось в работах [6, 8, 11].

В книге [6] для приближенного решения уравнения Прандтля был применен метод дискретных вихрей.

В работе [11] предложен оригинальный метод, основанный на построении последовательности обратимых матриц.

В случае равномерной сетки узлов сплайн-коллокационный метод нулевого порядка исследован в [8], где доказана однозначная разрешимость вычислительной схемы и получена оценка погрешности.

В работе [11] отмечена в связи с большим прикладным значением уравнения Прандтля необходимость в разработке эффективных методов его решения.

Ниже описывается сплайн-коллокационный метод нулевого порядка решения уравнения (25) на неравномерной сетке узлов.

Приближенное решение уравнения (25) будем искать в виде кусочно-постоянных функций (14), коэффициенты $\{\alpha_{i_1,i_2}^k\}$ которых находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \alpha_{j_1,j_2}^l \int\int_{\Delta_{j_1,j_2}^l} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left( \left(\tau_1 - \bar{v}_{i_1}^k\right)^2 + \left(\tau_2 - \bar{v}_{i_2}^k\right)^2 \right)^{p/2}} = f\left(\bar{v}_{i_1,i_2}^k\right), \qquad (26)$$

в которой левые и правые части приравниваются во всех узлах $\overline{v}^{k}_{i_1,i_2}$, расположенных в области $\Omega$.

Вначале докажем однозначную разрешимость системы уравнений (26).

При этом для простоты будем считать, что все области $\Delta^{k}_{i_1,i_2}$ – квадраты. Оценим снизу модули диагональных элементов матрицы левой части системы уравнений (26).

Выше было показано, что

$$\left| \int\limits_{\Delta^{k}_{i_1,i_2}}\int \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\left(\tau_1-\overline{v}^{k}_{i_1}\right)^2+\left(\tau_2-\overline{v}^{k}_{i_2}\right)^2\right)^{p/2}} \right| = \frac{8}{(p-2)}\left(\frac{2}{h_k}\right)\int\limits_0^{\pi/4}(\cos\varphi)^{p-2}d\varphi.$$

Оценим теперь сверху сумму модулей внедиагональных элементов.

Очевидно,

$$J=\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j_1}\sum_{j_2}{}''|\,m_{kl}\,| = \int\limits_{\Omega\backslash\Delta^{k}_{i_1,i_2}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\left(\tau_1-\overline{v}^{k}_{i_1}\right)^2+\left(\tau_2-\overline{v}^{k}_{i_2}\right)^2\right)^{p/2}},$$

где $\sum\limits_{l=0}^{N-1}\sum\limits_{j_1}\sum\limits_{j_2}{}''$ означает суммирование по всем наборам верхних и нижних индексов $(l,j_1,j_2)$ таких, что $(l,j_1,j_2)\neq(k,i_1,i_2)$.

Из свойства аддитивности гиперсингулярных интегралов следует, что последний интеграл равен разности двух интегралов

$$J=\iint\limits_{\Omega}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\left(\tau_1-\overline{v}^{k}_{i_1}\right)^2+\left(\tau_2-\overline{v}^{k}_{i_2}\right)^2\right)^{p/2}}-$$

$$-\int\limits_{\Delta^{k}_{i_1,i_2}}\int\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\left(\tau_1-\overline{v}^{k}_{i_1}\right)^2+\left(\tau_2-\overline{v}^{k}_{i_2}\right)^2\right)^{p/2}}=J_1-J_2.$$

Интеграл $J_2$ был оценен выше и он равен

$$J_2=-\frac{8}{(p-2)}\left(\frac{2}{h_k}\right)\int\limits_0^{\pi/4}(\cos\varphi)^{p-2}d\varphi.$$

Интеграл $J_1$, будучи гиперсингулярным интегралом, принимает отрицательные значения. Нетрудно видеть, что $|J_1|<|J_2|$.

Следовательно,

$$|J| = |J_1 - J_2| = |J_2| - |J_1| < |J_2|.$$

Таким образом, выполнены условия теоремы Адамара, и система уравнений (26) однозначно разрешима.

При $p = 3$, повторяя рассуждения, приведенные в [8], можно показать, что

$$\| x^* - x_N^* \|_{C(\Omega)} \le BN^{-1/2},$$

где $x^*$ и $x_N^*$ – решения уравнений (25), (26) соответственно.

### Список литературы


1. **Иванов, В. В.** Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В. В. Иванов. – Киев : Наукова думка, 1968. – 287 с.
2. **Гохберг И. Ц.** Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. – М. : Наука, 1971. – 352 с.
3. **Michlin S. G.** Singulare Integraloperatoren / S. G. Michlin, S. Prossdorf. – Berlin : Acad. Verl., 1980. – 514 p.
4. **Prossdorf, S.** Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations / S. Prossdorf, B. Silbermann. – Berlin. : Acad. Verl., 1991. – 544 p.
5. **Лифанов, И. К.** К решению составных особых интегральных уравнений / И. К. Лифанов // Успехи современной радиоэлектроники. – 2006. – № 8. – С. 62–67.
6. **Вайникко, Г. М.** Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский. – М. : Янус–К, 2001. – 508 с.
7. **Бойков, И. В.** Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений. – Пенза : Изд-во ПензГУ, 2004. – 316 с.
8. **Boykov, I. V.** An approximate solution of hypersingular integral equations / I. V. Boykov, E. S. Ventsel, A. I. Boykova // Applied Numerical Mathematics. – 2010. – № 60. – P. 607–628.
9. **Бойков, И. В.** Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами / И. В. Бойков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38. – № 1. – С. 25–33.
10. **Бойков, И. В.** Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПензГУ, 2007. – 236 с.
11. **Оселедец, И. В.** Приближенное обращение матриц при решении гиперсингулярного интегрального уравнения / И. В. Оселедец, Е. Е. Тыртышников // ЖВМ и МФ. – 2005. – Т. 45. – № 2. – С. 315–326.


---


***Бойков Илья Владимирович***
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет

***Boykov Ilya Vladimirovich***
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University

E-mail: math@pnzgu.ru

***Захарова Юлия Фридриховна***
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет

***Zakharova Yuliya Fridrikhovna***
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University

E-mail: math@pnzgu.ru

***Алаткин Сергей Павлович***
аспирант, Пензенский государственный университет

***Alatkin Sergey Pavlovich***
Postgraduate student, Penza State University

E-mail: math@pnzgu.ru

---

УДК 517.392

**Бойков, И. В.**

**Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений сплайн-коллокационными методами нулевого порядка** / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова, С. П. Алаткин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 3 (15). – С. 28–42.